



Fungsi Konveks dalam Optimisasi: Struktur, Sifat, dan Generalisasinya

Syamsuddin Mas'ud ^{1*}

¹ Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Makassar, Makassar 90224, Indonesia

* Penulis Korespondensi. Email: syamsuddinm@unm.ac.id

ABSTRAK

Artikel ini bertujuan untuk memberikan tinjauan komprehensif mengenai fungsi konveks, generalisasi konsep-konsep konveksitas, serta aplikasinya dalam optimisasi dan analisis matematika. Meskipun konsep-konsep dasar mengenai fungsi konveks sudah banyak dipahami, pemahaman dan penerapan konsep-konsep lanjutan seperti kuasikonveksitas, log-konveksitas, dan fungsi konjugat masih terbatas dalam berbagai masalah optimisasi yang lebih kompleks, terutama dalam konteks estimasi parameter statistik dan *machine learning*. Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dengan analisis deskriptif terhadap teori dan konsep yang dikembangkan dalam buku dan jurnal ilmiah, serta membandingkan berbagai pendekatan dalam optimisasi dan struktur fungsional yang lebih kompleks. Hasil penelitian menunjukkan bahwa fungsi konveks memiliki karakteristik yang sangat bermanfaat dalam optimisasi, dan konsep-konsep generalisasi konveksitas seperti kuasikonveksitas dan log-konveksitas dapat memperluas aplikasi fungsi konveks dalam analisis yang lebih kompleks, seperti pada model statistik dan *machine learning*.

Kata Kunci:

Fungsi Konveks; Kuasikonveksitas; Log-Konveksitas; Optimisasi

ABSTRACT

This article aims to provide a comprehensive review of convex functions, generalizations of convexity concepts, and their applications in optimization and mathematical analysis. Although the basic concepts of convex functions are well understood, the understanding and application of advanced concepts such as quasiconvexity, log-convexity, and conjugate functions remain limited in more complex optimization problems, particularly in the context of statistical parameter estimation and machine learning. This study employs a literature review methodology with a descriptive analysis of theories and concepts developed in books and scientific journals, comparing various approaches in optimization and more complex functional structures. The findings highlight that convex functions possess valuable characteristics for optimization, and generalizations of convexity concepts, such as quasiconvexity and log-convexity, can extend the applications of convex functions in more complex analyses, such as in statistical models and machine learning.

Keywords:

Convex Functions, Quasiconvexity, Log-Convexity, Optimization

1. Pendahuluan

Optimisasi merupakan pilar penting dalam berbagai disiplin ilmu, mulai dari matematika terapan, teknik, ekonomi, hingga ilmu komputer [1], [2]. Dalam konteks ini, fungsi konveks memainkan peran sentral karena sifat-sifatnya yang unik dan kemampuannya untuk menyederhanakan masalah optimisasi yang kompleks. Sifat konveksitas menjamin keberadaan minimum global, sehingga memudahkan pencarian

solusi optimal [3], [4]. Oleh karena itu, pemahaman yang mendalam terhadap struktur dan sifat fungsi konveks menjadi hal yang esensial dalam berbagai penelitian dan aplikasi.

Fungsi konveks memiliki definisi dasar yang sederhana tetapi implikasi yang luas. Definisi ini menyatakan bahwa segmen garis yang menghubungkan dua titik pada grafik suatu fungsi selalu berada di atas atau tepat pada grafik tersebut yang definisi formalnya telah dinyatakan dalam banyak referensi [1], [4], [5], [6]. Konsep ini tidak hanya terbatas pada fungsi bernilai riil tetapi juga dapat diperluas ke ruang vektor atau ruang berdimensi- n [1], [7], [8]. Sifat-sifat seperti kontinuitas, diferensiabilitas, dan keberadaan subgradien menjadikan fungsi konveks sebagai alat yang ampuh dalam analisis matematika.

Dalam perkembangannya, konsep fungsi konveks telah mengalami berbagai generalisasi untuk menangani masalah optimisasi yang lebih kompleks. Kuasikonveksitas, misalnya, memperluas konsep konveksitas dengan melonggarkan persyaratan pada segmen garis [9]. Log-konveksitas, di sisi lain, berfokus pada fungsi yang logaritmanya bersifat konveks, sehingga memenuhi ketaksamaan kombinasi cembung dalam domain positifnya. Selain itu, fungsi konjugat, yang merupakan transformasi Legendre-Fenchel dari fungsi konveks, memberikan alat untuk mengubah masalah optimisasi primal menjadi masalah dual yang sering kali lebih mudah diselesaikan [1].

Mengingat pentingnya fungsi konveks dan generalisasinya dalam teori optimisasi, artikel ini bertujuan untuk memberikan tinjauan komprehensif mengenai struktur, sifat, dan berbagai generalisasi fungsi konveks. Kami akan mengeksplorasi operasi-operasi yang mempertahankan kekonveksan, konsep-konsep lanjutan seperti kuasikonveksitas, log-konveksitas, dan fungsi konjugat, serta ketidaksamaan generalisasi yang berkaitan dengan fungsi konveks. Selain itu, artikel ini juga membahas perbandingan konsep-konsep tersebut, tantangan dalam penggunaannya, serta potensi aplikasinya dalam berbagai bidang ilmu. Dengan demikian, artikel ini diharapkan dapat memberikan wawasan yang mendalam bagi para peneliti dan praktisi yang tertarik pada optimisasi dan analisis matematika.

2. Metode

Tulisan ini merupakan studi literatur yang dilakukan dengan meninjau berbagai referensi primer dan sekunder mengenai fungsi konveks dan aplikasinya. Metode yang digunakan meliputi:

2.1 Prosedur Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menelusuri literatur yang membahas sifat dasar fungsi konveks, operasi yang mempertahankan kekonveksan, fungsi konjugat, fungsi kuasikonveks, fungsi log-konveks, serta penerapan fungsi konveks dalam ketidaksamaan generalisasi. Literatur yang digunakan berasal dari jurnal bereputasi dan buku.

2.2 Desain Penelitian

Kajian literatur dilakukan dengan metode analisis deskriptif, yaitu mengkaji dan membandingkan konsep-konsep dari berbagai sumber. Setiap konsep dianalisis berdasarkan teori yang telah dikembangkan oleh berbagai peneliti sebelumnya, dan

pembahasannya difokuskan pada bagaimana setiap sifat fungsi konveks berkontribusi terhadap pengembangan teori optimisasi.

3. Hasil dan Pembahasan

Dalam bagian ini, kami menguraikan berbagai konsep fundamental dan lanjutan dalam teori fungsi konveks serta generalisasinya. Pembahasan dimulai dengan sifat dasar fungsi konveks yang menjadi landasan dalam optimisasi, diikuti oleh operasi-operasi yang mempertahankan kekonveksan. Selanjutnya, kami mengeksplorasi konsep fungsi konjugat sebagai alat utama dalam teori dualitas, serta perluasan konveksitas melalui fungsi kuasikonveks. Selain itu, kami juga membahas fungsi log-konveks dan yang memiliki aplikasi luas dalam analisis stokastik dan ekonomi. Terakhir, kami mengkaji penerapan sifat kekonveksan dalam ketidaksamaan generalisasi, yang berperan dalam pengembangan metode estimasi parameter dan analisis optimisasi lanjutan.

3.1 Sifat Dasar dan Contoh Fungsi Konveks

Sebagai dasar untuk memahami konsep lanjutan dalam optimisasi, penting untuk memahami sifat dasar fungsi konveks. Fungsi konveks didefinisikan sebagai fungsi yang memenuhi ketidaksamaan Jensen. Beberapa sifat dasar yang tentunya mendukung dalam optimisasi konveks meliputi pertumbuhan linear antara dua titik dan hubungan dengan turunan pertama dan kedua. Terlebih dahulu, berikut diberikan definisi himpunan konveks dan contohnya pada $\mathbb{R}^n$.

Definisi 3.1 [1], [4], [6]

i) Diberikan $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Ruas garis dengan titik-titik ujung $\bar{x}$ dan $\bar{y}$ didefinisikan sebagai

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \{t\bar{x} + (1-t)\bar{y} | 0 \leq t \leq 1\}$$

ii) Suatu himpunan $M \subseteq \mathbb{R}^n$ disebut konveks jika untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in M$ berlaku

$$[\bar{x}, \bar{y}] \subseteq M.$$

Contoh 3.2 Misalkan $M \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x < 2, -1 \leq y \leq 1\}$. Himpunan M merupakan himpunan konveks dan jika $\bar{x} = (0,0), \bar{y} = (1,1)$ maka

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \{t\bar{x} + (1-t)\bar{y} | 0 \leq t \leq 1\}$$

merupakan ruas garis yang menghubungkan titik $\bar{x} = (0,0)$ dan titik $\bar{y} = (1,1)$.

Berdasarkan definisi himpunan konveks, apabila $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < |x|, 1 < |y|\}$ maka A bukanlah himpunan yang konveks. Selanjutnya akan diberikan definisi fungsi konveks dan contohnya.

Definisi 3.3 [1], [4], [6]

Diberikan himpunan konveks $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan konveks jika untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in D$ dan t dengan $0 \leq t \leq 1$,

$$f(t\bar{x} + (1-t)\bar{y}) \leq tf(\bar{x}) + (1-t)f(\bar{y}).$$

Contoh 3.4 Misalkan $[2,5] \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: [2,5] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Diperoleh bahwa f merupakan fungsi konveks. Di lain pihak, apabila $g = -f$, maka g bukanlah fungsi konveks.

Ketaksamaan $f(t\bar{x} + (1-t)\bar{y}) \leq tf(\bar{x}) + (1-t)f(\bar{y})$ pada Definisi 3.3 seringkali disebut sebagai Ketaksamaan Jensen. Ketaksamaan ini tentu dapat diperluas untuk lebih dari 2 titik. Selain itu, dalam konteks fungsi konveks, pertumbuhan nilai fungsi di antara dua titik selalu berada di bawah atau berimpit dengan garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut. Secara geometris, hal ini menunjukkan bahwa perubahan nilai fungsi tidak pernah melebihi perubahan yang ditentukan oleh garis secant antara dua titik, sehingga laju pertumbuhan fungsi konveks selalu lebih kecil atau sama dengan laju pertumbuhan linear yang direpresentasikan oleh garis tersebut.

Fungsi konveks juga memiliki kaitan dengan turunan pertamanya. Melalui kaitan ini diterangkan bahwa fungsi f yang terdiferensialkan pada domain terbuka dikatakan konveks jika dan hanya jika untuk semua x, y dalam domainnya berlaku $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$ [1]. Ketidaksamaan ini berarti bahwa grafik fungsi selalu berada di atas tangen di setiap titik. Oleh karena itu, konektivitas suatu fungsi dapat diperiksa hanya dengan melihat turunan pertamanya.

Selain itu, fungsi konveks dan turunan kedua fungsinya juga memiliki kaitan yang menarik. Melalui kaitan ini [1], [2], [6] dijelaskan bahwa fungsi yang memiliki turunan kedua pada domain terbukanya merupakan fungsi konveks jika dan hanya jika turunan keduanya pada domain tersebut selalu non-negatif. Oleh karena itu, konveksitas suatu fungsi dapat diperiksa secara langsung melalui turunan keduanya, sehingga memberikan cara yang lebih sederhana dan efisien untuk menentukan apakah suatu fungsi konveks atau tidak.

Berdasarkan kedua kaitan di atas, kaitan fungsi konveks dengan turunan kedua diperkenalkan karena dalam beberapa kondisi, jauh lebih mudah melihat konveksitas dengan memanfaatkan turunan keduanya. Hal ini dapat dilihat pada fungsi $f(x) = x^4$ pada $\mathbb{R}$, apabila yang diperiksa adalah turunan pertamanya maka akan diperoleh $f'(x) = 4x^3$ sehingga masih butuh beberapa proses lagi untuk mengambil kesimpulan terkait konveksitasnya. Namun apabila digunakan turunan keduanya, yaitu $f''(x) = 12x^2$, maka jelas akan diperoleh f konveks karena $f''(x)$ ini non-negatif.

3.2 Operasi yang Mempertahankan Kekonveksan

Pemahaman tentang sifat dasar yang diberikan pada bagian sebelumnya menjadi penting karena berbagai operasi dalam optimisasi perlu mempertahankan kekonveksan. Beberapa operasi yang mempertahankan kekonveksan meliputi kombinasi linear, supremum, dan komposisi dengan fungsi monoton [1], [6]. Operasi ini sering digunakan dalam perancangan algoritma optimisasi yang lebih efisien.

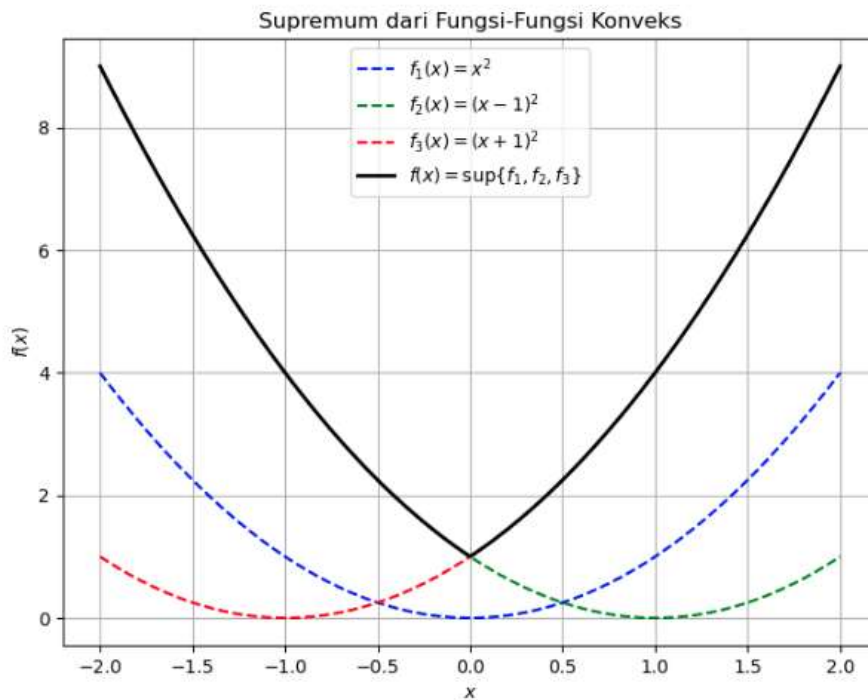
Kombinasi Linear dari Fungsi Konveks

Operasi ini menyatakan bahwa apabila f dan g merupakan fungsi-fungsi konveks dimana dua bilangan $\alpha, \beta \geq 0$, maka kombinasi linear $\alpha f + \beta g$ juga merupakan fungsi konveks. Kombinasi linear ini memungkinkan perumusan fungsi objektif yang fleksibel dan mudah dihitung. Contoh penggunaannya dalam algoritma optimisasi yaitu: Regresi Ridge/Lasso dalam ML (menyeimbangkan loss dan regularisasi) dan Optimasi Portofolio (menggabungkan keuntungan dan risiko).

Supremum dari Sekelompok Fungsi Konveks

Operasi ini menyatakan bahwa apabila diambil supremum dari koleksi fungsi-fungsi konveks maka hasilnya tetap merupakan fungsi konveks. Dalam hal ini, apabila f_k merupakan fungsi konveks untuk setiap k , maka $\sup_k f_k$ tetap merupakan fungsi konveks. Konsep ini digunakan dalam optimasi yang mempertimbangkan skenario terburuk atau pencarian solusi dengan batas maksimum/supremum. Contoh penggunaannya dalam algoritma optimisasi yaitu: optimasi ketahanan maksimum (*Robust Optimization*) dan SVM (*Support Vector Machine*) untuk klasifikasi dengan margin maksimum.

Misalkan diberikan fungsi-fungsi $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x - 1)^2$, dan $f_3(x) = (x + 1)^2$ maka konsep supremum, $f = \sup\{f_1, f_2, f_3\}$, dapat dilihat pada grafik berikut ini.



Gambar 1. Supremum dari beberapa fungsi konveks

Komposisi dengan Fungsi Monoton Nondecreasing

Operasi ini menyatakan bahwa apabila fungsi f dan g keduanya konveks dengan g monoton tidak turun sehingga komposisinya terdefinisi, maka $g \circ f$ juga konveks. Konsep ini memungkinkan penerapan transformasi nonlinier tanpa mengorbankan sifat konveksitas, sehingga tetap mempertahankan efisiensi dalam proses optimasi. Contoh penggunaannya dalam algoritma optimisasi yaitu: regresi logistik (fungsi sigmoid/logistik) dan regularisasi dalam *Deep Learning* (fungsi aktivasi seperti ReLU, Softplus).

3.3 Fungsi Konjugat

Salah satu konsep lanjutan dalam analisis fungsi konveks adalah fungsi konjugat, yang memiliki peran penting dalam teori dualitas. Fungsi konjugat merupakan alat utama dalam teori dualitas dan memiliki peran kunci dalam optimisasi konveks. Berikut ini diberikan definisi dari fungsi konjugat (*Legendre-Fenchel transform*).

Defenisi 3.5 [1], [4]

Diberikan fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi konjugat f , ditulis f^* , dan didefinisikan $f^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f^*(\bar{y}) = \sup_{\bar{x} \in \mathbb{R}^n} (\bar{y}^T \bar{x} - f(\bar{x}))$ untuk setiap $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

Dari Definisi 3.5 di atas, fungsi f^* selalu konveks meskipun dalam keadaan f sendiri bukan fungsi konveks. Berikut ini diberikan contoh untuk lebih memahami penggunaan fungsi konjugat ini.

Contoh 3.6

Misalkan suatu fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = -x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

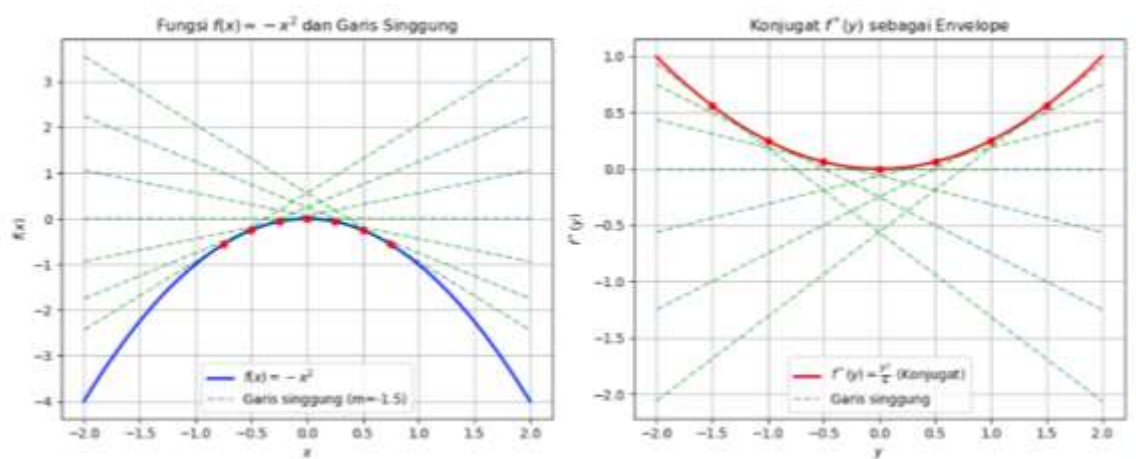
Dengan definisi konjugat fungsi,

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy + x^2).$$

Berdasarkan konsep turunan dalam mencari titik kritis (maksimum) diperoleh maksimum dari $h(x) = xy + x^2$ tercapai dengan $0 = h'(x) = y + 2x$ atau $x = -\frac{y}{2}$. Akibatnya,

$$h(x) = h\left(-\frac{y}{2}\right) = \frac{y^2}{4}.$$

Karena itu, didapatkan konjugat dari f adalah $f^*(y) = \frac{y^2}{4}, \forall y \in \mathbb{R}$.



Gambar 2. Grafik fungsi $f(x) = -x^2$ dan konjugatnya $f^*(y) = \frac{y^2}{4}$ sebagai *envelop* yang menyentuh/menyinggung garis-garis (hijau)

3.4 Fungsi Kuasikonveks

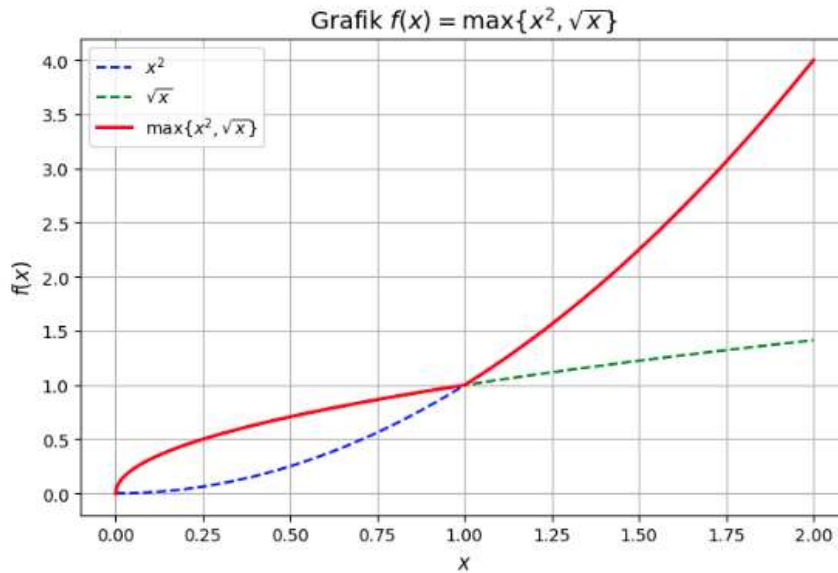
Selain fungsi konjugat, konsep kekonveksan juga dapat diperluas melalui fungsi kuasikonveks. Fungsi kuasikonveks memperluas konsep kekonveksan dan sering digunakan dalam ekonomi dan teori keputusan. Perbedaannya dengan fungsi konveks biasa adalah bahwa kuasikonveksitas hanya mensyaratkan bahwa himpunan sublevelnya konveks, tidak seluruh fungsi. Definisi dari fungsi kuasikonveks sendiri dinyatakan dalam bentuk sublevel himpunan (yang memiliki pengertian tersendiri). Namun, untuk mengetahui bahwa suatu fungsi

merupakan kuasikonveks, maka dapat juga digunakan dengan pelibatan variasi ketaksamaan Jensen [1], yang menyatakan bahwa $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ kuasikonveks jika dan hanya jika D himpunan konveks dan untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in D$ dan t dengan $0 \leq t \leq 1$,

$$f(t\bar{x} + (1-t)\bar{y}) \leq \max\{f(\bar{x}), f(\bar{y})\}.$$

Contoh 3.7

Diberikan fungsi $f(x) = \max\{x^2, \sqrt{x}\}$ pada $[0,2]$. Misalnya akan diminimalkan f pada domain tersebut. Dapat diperiksa bahwa fungsi ini tidak konveks, namun dapat diperiksa pula bahwa fungsi ini kuasikonveks.



Gambar 3. Grafik fungsi kuasikonveks yang bukan fungsi konveks

Perhatikan Gambar 2 (kanan) dan Gambar 3. Dapat dilihat bahwa fungsi konveks konsisten cembung. Adapun fungsi kuasikonveks bisa saja tidak selalu konveks.

3.5 Fungsi Log-Konveks

Konsep lain yang memiliki keterkaitan erat dengan fungsi konveks adalah fungsi log-konveks (*logarithmically convex*). Log-konveksitas memiliki banyak aplikasi dalam analisis stokastik dan ekonomi. Fungsi log-konveks sering digunakan dalam probabilitas dan statistik untuk model distribusi yang lebih fleksibel. Suatu fungsi f dikatakan log-konveks jika dan hanya jika $f > 0$ dan $\log f$ konveks. Selanjutnya, untuk mempermudah dalam mengidentifikasi log-konveks secara langsung tanpa harus melibatkan bentuk logaritmanya, maka digunakan sifat bahwa fungsi $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ dimana D himpunan konveks disertai $f > 0$, merupakan fungsi log-konveks jika dan hanya jika untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in D$ dan t dengan $0 \leq t \leq 1$,

$$f(t\bar{x} + (1-t)\bar{y}) \leq f(\bar{x})^t f(\bar{y})^{1-t}.$$

Contoh 3.8

Salah satu konsep yang berkaitan erat dengan distribusi probabilitas/statistic adalah Fungsi Gamma,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du, \quad x \geq 1.$$

Fungsi Gamma ini adalah fungsi yang log-convex pada $x \geq 1$. Hal ini dapat diperiksa dengan menggunakan ketidaksamaan Hölder, yang menyatakan integral dari rata-rata geometrik dua fungsi positif tidak melebihi rata-rata geometrik integralnya.

3.6 Kekonveksan dalam Ketidaksamaan Generalisasi

Selain perluasan yang telah diberikan sebelumnya, konsep kekonveksan dapat diperluas dalam konteks ketidaksamaan generalisasi untuk mendukung analisis lebih lanjut. Salah satu penerapannya adalah dalam pengembangan metode estimasi parameter dalam statistik dan *machine learning*.

Konveksitas biasanya didefinisikan dalam ruang angka biasa (seperti bilangan real atau vektor). Namun, konsep ini dapat diperluas ke struktur yang lebih kompleks, seperti matriks atau sistem dengan banyak variabel, menggunakan aturan perbandingan yang lebih umum, disebut ketidaksamaan generalisasi. Dalam pendekatan ini, suatu fungsi dikatakan konveks jika nilai fungsi di titik tengah antara dua titik selalu memenuhi ketidaksamaan yang menghubungkan nilai fungsi di kedua titik tersebut, dengan mempertimbangkan struktur yang lebih umum seperti ruang vektor $\mathbb{R}^n$. Tentu saja ketaksamaannya diidentifikasi menggunakan konsep urutan parsial yang lebih umum dari pada urutan di $\mathbb{R}$. Sederhanya, bentuk atau definisi fungsi konveks pada fungsi $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $D \subseteq \mathbb{R}^n$ diperumum dengan konsep urutan parsial.

4. Kesimpulan

Artikel ini meninjau berbagai konsep penting dalam fungsi konveks dan turunannya. Perbandingan antara fungsi konveks, kuasikonveks, dan log-konveks menunjukkan bahwa masing-masing memiliki keunggulan dan keterbatasan tergantung pada konteks penggunaannya. Masih banyak potensi penelitian dalam optimisasi konveks, terutama dalam pengembangan algoritma yang lebih efisien serta penerapannya dalam *machine learning*, ekonomi, dan bidang lainnya.

Referensi

- [1] S. P. Boyd dan L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press, 2004.
- [2] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton, New Jersey, Amerika Serikat: Princeton University Press, 1970.
- [3] A. H. Alridha, F. H. A. Alsharify, dan Z. Al-Khafaji, "A Review of Optimization Techniques: Applications and Comparative Analysis," *ijcsm*, vol. 5, no. 2, hlm. 122–134, Mei 2024, doi: <https://doi.org/10.52866/ijcsm.2024-05-02-011>.
- [4] R. Correa, A. Hantoute, dan M. A. López, *Fundamentals of Convex Analysis and Optimization: A Supremum Function Approach*. dalam Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Cham: Springer International Publishing, 2023. doi: 10.1007/978-3-031-29551-5.
- [5] R. G. Bartle, *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*, Fourth. United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 2011.

- [6] A. Ben-Tal dan A. Nemirovski, *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. doi: 10.1137/1.9780898718829.
- [7] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- [8] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley classics library ed. dalam Wiley classics library. New York: Wiley, 1989.
- [9] V. Andina, E. Cahya, dan S. Fatimah, "Sifat-Sifat Fungsi Konveks yang Tidak dapat Digeneralisasi Menjadi Sifat-Sifat Fungsi Kuasikonveks," *Eureka Matika*, vol. 3, no. 1, hlm. 59–74, 2015.