Lontara Journal of Mathematics, Statistics And Application
Volume 02, Nomor 01, Mei 2025

Tinjauan Singkat tentang Optimisasi Konveks

Syamsuddin Mas'ud[1*]

[1] *Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Makassar, Makassar 90244, Indonesia*

[*] *Penulis Korespondensi. Email: syamsuddinm@unm.ac.id*

ABSTRAK

Optimisasi konveks merupakan cabang optimisasi matematika yang memiliki peran penting dalam berbagai disiplin ilmu, seperti kecerdasan buatan, ekonomi, dan teknik. Keunggulan utama optimisasi konveks terletak pada jaminan solusi optimal global serta efisiensi metode penyelesaiannya. Artikel ini memberikan tinjauan literatur mengenai konsep dasar optimisasi konveks, metode utama yang digunakan, serta aplikasinya dalam berbagai bidang. Beberapa metode numerik yang banyak digunakan, seperti *gradient descent*, metode Newton, dan *interior-point*, dikaji dari segi efektivitas dan efisiensi komputasi. Selain itu, teori dualitas dalam optimisasi konveks dibahas sebagai alat analisis yang membantu penyederhanaan penyelesaian masalah. Dibandingkan dengan metode klasik seperti Simplex dan metode Lagrange, optimisasi konveks menawarkan stabilitas dan efisiensi yang lebih baik, terutama dalam menangani masalah skala besar. Hasil tinjauan menunjukkan bahwa pengembangan metode optimisasi konveks semakin berorientasi pada integrasi dengan *machine learning* dan pemrosesan *big data*. Studi lanjutan direkomendasikan untuk mengeksplorasi pendekatan hibrida yang mengombinasikan optimisasi konveks dengan teknik lain guna meningkatkan efektivitas dalam aplikasi nyata.

Kata Kunci:
Optimisasi Konveks; Metode Numerik; Dualitas; Efisiensi Komputasi; Aplikasi

ABSTRACT

Convex optimization is a branch of mathematical optimization that plays a crucial role in various disciplines, including artificial intelligence, economics, and engineering. Its primary advantages lie in the guarantee of a global optimal solution and the efficiency of its solution methods. This article provides a literature review on the fundamental concepts of convex optimization, key solution methods, and their applications across different fields. Several commonly used numerical methods, such as gradient descent, Newton's method, and interior-point methods, are analyzed in terms of their effectiveness and computational efficiency. Additionally, duality theory in convex optimization is discussed as an analytical tool that simplifies problem-solving. Compared to classical methods such as the Simplex method and Lagrange multipliers, convex optimization offers greater stability and efficiency, particularly for large-scale problems. The review highlights the growing integration of convex optimization with machine learning and big data processing. Future research is recommended to explore hybrid approaches that combine convex optimization with other techniques to enhance effectiveness in real-world applications.

Keywords:
Convex Optimization; Numerical Methods; Duality; Computational Efficiency; Applications

1. Pendahuluan

Optimisasi matematika merupakan salah satu cabang matematika yang berfokus pada penentuan nilai optimal (nilai minimum atau maksimum) dari suatu fungsi objektif, dengan atau tanpa adanya kendala yang harus dipenuhi. Pengertian ini sejalan dengan penjelasan S. Boyd [1].

Jenis-jenis optimisasi sendiri ada banyak tergantung dari sisi mana optimisasi ini dikelompokkan. Apabila dipandang dari sisi ada atau tidaknya kendala maka dapat dibagi menjadi dua [1,12] yaitu : 1) optimisasi tak terbatasi (*unconstrained optimization*), optimisasi yang tidak memiliki kendala secara eksplisit dalam mencari solusi optimalnya, dan 2) optimisasi terbatasi (*constrained optimization*), optimisasi yang memiliki kendala eksplisit yang harus dipenuhi dalam mencari solusi optimalnya. Apabila dipandang dari sisi sifat fungsi objektifnya maka juga dibagi menjadi dua [1,12] yaitu: 1) optimisasi konveks (*convex optimization*), optmisasi yang fungsi objektif dan kendalanya merupakan fungsi konveks, dan 2) optimisasi non-konveks (*non-convex optimization*): optmisasi yang fungsi objektif dan kendalanya bukan merupakan fungsi konveks.

Selain itu, optimisasi juga dapat dipandang dari sisi jenis variabel keputusannya dan dari sisi metode penyelesaiannya. Apabila dipandang dari sisi jenis variabel keputusan yang digunakan maka optimisasi dibagi menjadi dua [12] yaitu: 1) optimisasi kontinu (*continuous optimization*), variabel keputusan dapat mengambil nilai dalam rentang kontinu. 2) optimisasi diskrit (*discrete optimization*): variabel keputusan hanya dapat mengambil nilai diskrit, seperti bilangan bulat. Apabila dipandang dari sisi metode penyelesaiannya, maka optimisasi dibagi menjadi tiga [1,12,13] yaitu: 1) optimisasi analitik, solusi diperoleh melalui pendekatan matematis langsung, 2) optimisasi numerik, menggunakan metode numerik seperti *gradient descent* atau *Newton's method*, 3) optimisasi heuristik & metaheuristik, menggunakan pendekatan berbasis aturan atau algoritma pencarian, seperti *genetic algorithms* atau *simulated annealing*.

Optimisasi konveks merupakan cabang matematika terapan yang memiliki peran penting dalam berbagai bidang seperti ilmu komputer, ekonomi, keuangan, statistika, data mining, serta berbagai cabang ilmu pengetahuan dan teknik. Keunggulan utama optimisasi konveks adalah adanya jaminan solusi optimal global dan metode penyelesaiannya yang efisien. Beberapa penelitian terbaru menunjukkan bahwa optimisasi konveks menjadi dasar dalam pengembangan algoritma *machine learning* dan analisis data skala besar [1,2].

Permasalahan inti dalam optimisasi konveks adalah bagaimana menemukan solusi optimal dengan efisiensi komputasi yang tinggi, terutama untuk masalah berskala besar dan dengan batasan non-linier. Tantangan ini semakin relevan dengan meningkatnya kebutuhan dalam pengolahan data berskala besar dan *machine learning*, sebagaimana telah diidentifikasi dalam berbagai studi [3,4,5]. Salah satu solusi yang banyak digunakan untuk menangani permasalahan ini adalah pengembangan metode numerik seperti gradient descent [6], metode Newton [7], dan algoritma berbasis proyeksi [8]. Pendekatan ini telah terbukti efektif dalam berbagai aplikasi praktis.

Kajian optimisasi konveks telah berkembang pesat, terutama sejak 1980-an dengan diterapkannya metode *interior-point* dalam pemrograman linear. Metode ini memungkinkan penyelesaian efisien berbagai masalah, termasuk pemrograman semidefinit dan kerucut orde kedua. Sejak 1990, penelitian lebih lanjut mengungkap aplikasi optimisasi konveks yang luas dalam sistem kendali, pemrosesan sinyal, komunikasi, desain sirkuit, analisis data, statistik, dan keuangan. Pada tahun 2010, M.

V. Afonso mengkaji tentang penggunaan metode *Alternating Direction Method of Multipliers* (ADMM) untuk pemulihan citra yang cepat, teknik optimisasi konveks yang sangat berguna dalam pemrosesan sinyal. Pada tahun 2016, L.M. Rasdi Rere menyajikan suatu tulisan yang memperlihatkan bahwa perkembangan AI (*Artificial Intelegence*) juga tidak lepas dari penggunana konsep terkait optimisasi konveks. Selain itu, aplikasi lainnya pada optimisasi kombinatorial dan global yang digunakan untuk menentukan batas optimal dan solusi aproksimasi. Dengan meningkatnya kebutuhan efisiensi komputasi, optimisasi konveks terus berkembang dan berpotensi semakin banyak diaplikasikan dalam berbagai bidang [1,9,10,11].

Tujuan dari tulisan ini adalah memberikan tinjauan singkat mengenai optimisasi konveks, termasuk konsep dasar, metode utama yang digunakan, serta aplikasinya dalam berbagai bidang. Dengan demikian, artikel ini diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih baik mengenai pentingnya optimisasi konveks serta perkembangannya dalam penelitian dan aplikasi modern.

2. Konsep Dasar Optimisasi Konveks

2.1 Definisi Formal dan Jenis-Jenis Optimisasi Konveks

Optimisasi konveks adalah cabang dari optimisasi matematis yang berfokus pada pemecahan masalah di mana fungsi tujuan dan himpunan kendala bersifat konveks. Sebuah fungsi bernilai riil dikatakan konveks jika untuk setiap dua titik berbeda pada domainnya, garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut berada di atas atau pada grafik fungsi di antara kedua titik tersebut [14]. Untuk mempermudah pembahasan terkait optimisisasi konveks, maka penting untuk mengetahui definisi formal dari fungsi konveks. Berikut ini diberikan definisi untuk fungsi konveks yang paling sederhana.

Definisi 2.1 [15] Diberikan interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks pada I jika untuk t dengan $0 \leq t \leq 1$ dan sebarang $x_1, x_2 \in I$, berlaku

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Fungsi $f(x) = |x|$ merupakan fungsi konveks pada $\mathbb{R}$. Lebih lanjut, fungsi konveks ini mengalami perkembangan ke bentuk yang lebih umum yaitu pada fungsi dengan domain berdimensi n atau domain fungsinya menjadi $\mathbb{R}^n$. Berikut ini diberikan definisi yang dimaksud.

Definisi 2.2 [1] Diberikan interval $I \subseteq \mathbb{R}^n$. Fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks pada I jika untuk t dengan $0 \leq t \leq 1$ dan sebarang $x, y \in I$, berlaku

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Berdasarkan definisi fungsi konveks tersebut, masalah-masalah optimisasi konveks diselesaikan. Adapun bentuk umum dari masalah optimisasi yaitu:

$$\begin{array}{ll} \text{mengoptimalkan} & f_0(x) \\ \text{syarat-syarat} & f_i(x) \leq b_i, i = 1,2,\ldots,m. \end{array}$$

Disini, vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x^n)$ adalah variabel optimisasi, fungsi $f_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adalah fungsi tujuan, dan $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1,2,\ldots,m$ adalah syarat-syarat dalam masalah optimisasi (fungsi kendala), dan $b_1, b_2, \ldots, b_m$ adalah batasan-batasan untuk fungsi kendala.

Selanjutnya, akan diberikan jenis-jenis optimisasi konveks yang dipandang dari berbagai sisi. Diantaranya dapat dilihat dari tiga sisi yaitu: linearitas fungsinya, kendalanya, jenis modelnya.

Dari sisi linearitas fungsinya dibagi menjadi dua jenis [16] yaitu: 1) optimisasi linear, fungsi tujuan dan kendalanya merupakan fungsi linear yang diantara metodenya adalah *Simplex Method* dan *Interior-Point Method*; 2) optimisasi non-linear fungsi tujuan dan kendalanya adalah fungsi non-linear namun tetap konveks yang diantara metodenya adalah *Feasible-Point Methods* dan *Penalty and Barrier Methods*.

Dari sisi kendalanya dibagi menjadi dua jenis [1,16,17] yaitu: 1) optimisasi dengan kendala, memiliki kendala secara eksplisit dalam bentuk persamaan ataupun pertidaksamaan yang diantara metodenya adalah *Lagrangian Method* dan *Interior-Point Method*; 2) optimisasi tanpa kendala, tidak memiliki kendala atau batasan pada variabelnya yang diantara metodenya adalah *Gradient Descent* dan *Newton's Method*.

Dari sisi jenis modelnya dibagi menjadi dua jenis [1] yaitu: 1) optimisasi kuadratik (*Quadratic Programming, QP*), jenis optimisasi konveks di mana fungsi objektif berbentuk kuadratik dan kendala berbentuk linear (affine) yang diantara aplikasinya adalah *Portfolio Optimization*; 2) optimisasi konveks umum, tidak terbatas pada optimisasi kuadratik namun tetap konveks yang diantara aplikasinya adalah *Logistic Regression*.

2.2 Eksistensi dan Karakterisasi Solusi Optimal

Pada bagian ini akan dibahas kapan solusi optimal ada (eksistensi solusi optimal) dan bagaimana cara mengenalinya (karakteristik solusi optimal). Eksistensi solusi optimal dalam optimisasi konveks bergantung pada beberapa faktor utama, seperti kekompakan himpunan feasible, keterbatasan fungsi objektif, serta sifat kontinuitas dan kekonveksannya. Dalam kasus sederhana, ketika himpunan feasible bersifat kompak dan fungsi objektif kontinu, Teorema Weierstrass memastikan keberadaan solusi optimal. Namun, dalam banyak masalah optimisasi konveks yang lebih kompleks, diperlukan pendekatan yang lebih mendalam untuk menjamin eksistensi solusi optimal. Beberapa teorema fundamental yang digunakan untuk menganalisis hal ini antara lain teorema eksistensi dalam optimisasi konveks, kondisi Karush-Kuhn-Tucker (KKT), serta teorema variasional. Berikut diberikan beberapa teorema terkait syarat eksistensi solusi optimal tersebut.

Teorema 2.3 [17,20] (Teorema Weierstrass (Teorema Nilai Ekstrem)) Jika f kontinu pada ruang metrik kompak X, maka f memiliki nilai maksimum dan nilai minimum pada X.

Termasuk dalam teorema ini apabila fungsinya $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Teorema 2.4 [1] (Karush-Kuhn-Tucker (KKT)) Misalkan suatu masalah optimisasi diberikan sebagai:

$$\min_x f_0(x)$$

dengan kendala

$$f_i(x) \leq 0, i = 1,2, \dots, m$$

$$h_j(x) \le 0, j = 1,2,\dots,p.$$

Jika f_0 adalah fungsi tujuan yang konveks, f_i adalah fungsi kendala yang konveks, h_j adalah fungsi kendala yang linear (*affine*), maka titik $(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{v})$ yang memenuhi kondisi KKT merupakan solusi optimal untuk masalah primal dan dual dengan gap dualitas nol. Kondisi KKT yaitu:

$$f_i(\tilde{x}) \le 0, \qquad i = 1,2,\dots,m$$
$$h_j(\tilde{x}) = 0, \qquad j = 1,2,\dots,p$$
$$\tilde{\lambda}_i \ge 0, \qquad i = 1,2,\dots,m$$
$$\tilde{\lambda}_i f_i(\tilde{x}) = 0, \qquad i = 1,2,\dots,m$$
$$\nabla f_0(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i \nabla f_i(\tilde{x}) + \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}_j \nabla h_j(\tilde{x}) = 0.$$

Dalam hal ini, $\tilde{x}$ adalah solusi optimal primal dan $(\tilde{\lambda}, \tilde{v})$ adalah solusi optimal dual, dan tidak ada gap dualitas, yaitu

$$g(\tilde{\lambda}, \tilde{v}) = f_0(\tilde{x}).$$

Selanjutnya, terkait karakterisasi solusi optimal diantaranya yaitu solusi yang unik (tunggal). Jika fungsi tujuan bersifat konveks tegas pada himpunan feasible, maka solusi optimalnya unik [19]. Berbeda jika fungsi tujuan hanya bersifat konveks dan tidak tegas, maka solusi optimalnya mungkin saja tidak tunggal. Selain itu, terdapat juga solusi optimal yang merupakan solusi global [1]. Solusi ini, tentunya akan ada pada masalah-masalah optimisasi yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Tentu saja masih terdapat karakterisasi solusi optimal lainnya, termasuk juga karakteristik berupa dualisme kuat.

3. Teori Dualitas dan Implementasi Optimisasi Konveks

3.1 Teori Dualitas dalam Optimisasi Konveks

Ketika ingin menyelesaikan suatu masalah optimasi, misalnya mencari rute tercepat ke lokasi tertentu atau menentukan harga termurah untuk suatu produk. Dalam matematika, masalah seperti ini disebut masalah *primal*. Namun, terdapat cara lain untuk melihat masalah ini, yaitu dengan membentuk masalah *dual*, perspektif yang berbeda tetapi tetap mengarah pada solusi yang sama. Dualitas dapat memberikan bantuan yang besar dalam menemukan solusi optimal dengan lebih efisien dan juga memberikan wawasan tambahan tentang struktur masalahnya.

Untuk memahami dualitas, diperkenalkan suatu fungsi yang disebut dengan fungsi *Lagrangian*, yang menggabungkan fungsi tujuan dengan kendala yang ada. Misalnya, jika ingin meminimalkan biaya produksi tetapi tetap harus memenuhi batasan bahan baku dan tenaga kerja, fungsi *Lagrangian* akan menggabungkan kedua aspek ini dengan memperkenalkan faktor penyesuaian yang disebut *multiplikator Lagrange*. Dari sini, kita bisa mendapatkan fungsi dual, yang memberikan batas bawah dari solusi optimal masalah primal.

Masalah primal dan dual memiliki dua kaitan. Pertama, *weak duality*, yaitu kondisi dimana solusi dari masalah dual selalu memberikan batas bawah dari solusi masalah primal. Artinya, jika solusi dari masalah dual ditemukan, maka dipastikan bahwa solusi primal tidak bisa lebih kecil dari itu. Kedua, *strong duality*, yaitu dalam kondisi tertentu (misalnya, tidak ada kendala yang bertentangan), solusi masalah dual sama dengan solusi masalah primal. Ini sangat membantu karena sering kali lebih mudah menyelesaikan masalah dual dibandingkan masalah primal.

Misalkan ketika ingin membeli barang dengan harga serendah mungkin, tetapi ada batasan jumlah uang yang dimiliki dan jumlah barang yang tersedia. Masalah primalnya adalah berapa harga minimal yang harus dibayar untuk mendapatkan barang yang dibutuhkan. Sedangkan masalah dualnya adalah jika dipandang dari sisi penjual, berapa harga minimum yang harus ditetapkan agar tetap mendapatkan untung. Dengan dualitas, dapat dilihat bagaimana perubahan harga atau stok akan mempengaruhi kedua belah pihak dan bagaimana menemukan titik keseimbangan optimal.

3.2 Penerapan Dualitas dalam Perhitungan Solusi Optimal

Diantara kelebihan dari penerapan konsep dualitas adalah mempermudah perhitungan yaitu terkadang masalah primal sulit diselesaikan langsung, tetapi masalah dual lebih sederhana. Kelebihan lainnya adalah memberikan pemahan yang lebih mendalam, yaitu dengan dualitas, kita dapat memahami batas optimal yang mungkin tercapai tanpa harus mencari solusinya secara langsung. Selain itu, konsep dualitas juga dapat digunakan dalam banyak bidang seperti dalam bidang ekonomi, *machine learning*, dan teknik untuk membuat keputusan yang lebih efisien.

Contoh 3.1 Misalkan akan disusun jadwal kerja untuk sekelompok pekerja agar jam kerja mereka merata dan tetap efisien. Masalah ini dapat diformulasikan dalam bentuk optimisasi. Misalkan masalahnya adalah meminimalkan total jam kerja lembur pekerja, yaitu dengan fungsi tujuan

$$\text{minimalkan } \sum_i y_i,$$

dengan kendala berikut.

a. Setiap pekerja harus bekerja setidaknya dalam jumlah minimum jam tertentu: $x_i \geq w_{min}\ \forall i.$
b. Setiap pekerja tidak boleh bekerja lebih dari batas maksimum jam kerja: : $x_i \leq w_{max}\ \forall i.$
c. Total jam kerja harus mencukupi kebutuhan operasional: $\sum_i x_i = W_{total}.$

Dimana, x_i adalah jam kerja pekerja ke-i dan y_i adalah jam lembur pekerja ke-i. Masalah ini dapat dipandang sebagai masalah *primal* dari masalah optmisasi yang ingin diselesaikan.

Selanjutnya akan dibentuk masalah *dual*-nya dengan pertimbangan bahwa, bagaimana jika ingin mengetahui pengaruh perubahan batasan terhadap solusi optimal? Apa yang bisa dilakukan?

Maksimalkan nilai manfaat dari alokasi jam kerja, yaitu dengan fungsi tujuan

$$\text{maksimalkan } \lambda W_{total} - \sum_i (\mu_i w_{min} + v_i w_{max}),$$

dengan kendala sebagai berikut.

a. Bilangan λ harus sama untuk semua pekerja agar distribusi jam kerja adil.
b. Bilangan μ_i dan v_i tidak boleh negatif, karena mereka mencerminkan batasan jam kerja, dimana $\lambda + \mu_i + v_i = 1$.

Dengan pendekatan ini, dapat diketahui bagaimana perubahan dalam kebutuhan operasional W_{total} atau batasan jam kerja akan mempengaruhi solusi optimal. Misalnya:

a. Jika W_{total} bertambah, maka harga bayangan λ akan menunjukkan dampak perubahan ini pada efisiensi kerja.

b. Jika batas maksimum jam kerja w_{max} diperketat, maka nilai v_i akan menunjukkan seberapa besar pengaruhnya terhadap total jam kerja yang tersedia.

Karena yang diinginkan adalah jam kerja yang optimal yaitu jam kerja setiap pekerja (misalkan ada 3 pekerja) berada di antara w_{min} dan w_{max} yang berarti variabel dualnya, μ_i dan v_i bernilai nol atau batasan minimum dan maksimum tidak menghambat solusi optimal. Akibatnya, $\lambda = 1$ yang berarti bahwa setiap peningkatan satu unit pada kebutuhan operasional W_{total} akan meningkatkan total jam kerja dengan rasio 1. Karena itu, setiap pekerja harus mendapatkan jumlah jam kerja yang merata dan memenuhi kebutuhan operasional. Maka solusi primalnya adalah 8 jam kerja untuk setiap pekerja. Hasil ini tentu saja sejalan apabila dikerjakan langsung pada masalah primalnya,

batas jam kerja minimum, $w_{min} = 6\ jam$,

batas jam kerja maksimum, $w_{max} = 10\ jam$,

total jam kerja kebutuhan operasional, $W_{total} = 24\ jam$.

Dengan menggunakan metode optimisasi numerik seperti simplek atau metode numerik lainnya, maka solusi yang mungkin yaitu 8 jam kerja untuk setiap pekerja.

4. Perbandingan dengan Metode Klasik

4.1 Beberapa Metode Optimisasi Klasik dan Pengembangannya

Metode optimisasi klasik mencakup berbagai teknik yang telah lama digunakan untuk menemukan solusi optimal dalam berbagai masalah. Beberapa di antaranya diberikan sebagai berikut [1,21] beserta dengan pengembangan metode untuk mengatasi kelamahannya.

a. Metode Newton: Metode ini menggunakan turunan kedua untuk mempercepat konvergensi dalam pencarian minimum atau maksimum lokal dari suatu fungsi. Metode ini bersifat *affine invariant*, dan skala efisien terhadap dimensi masalah. Namun, biaya komputasinya tinggi karena memerlukan pembentukan Hessian serta penyelesaian sistem linear, meskipun dapat dioptimalkan dengan eksploitasi struktur masalah. Pengembangan metode untuk mengatasi kelemahan metode klasik diantaranya, algoritma genetika modern seperti NSGA-II [24] dengan mutasi adaptif meningkatkan kemampuan eksplorasi solusi optimal dalam berbagai fungsi tujuan. Metode ini lebih fleksibel dibandingkan metode klasik dalam menangani banyak kendala dan lebih efisien dalam mencari solusi optimal global.

b. Metode Quasi-Newton: Metode optimisasi yang memperkirakan matriks Hessian secara iteratif tanpa perlu komputasi eksplisit, sehingga meningkatkan efisiensi konvergensi. Secara komputasional, metode ini juga lebih ringan dibandingkan Metode Newton. Pengembangan metode untuk mengatasi kelemahan metode klasik diantaranya, algoritma genetika modern seperti NSGA-II.

c. Metode Lagrange Multiplier: Metode ini digunakan untuk menyelesaikan persoalan optimisasi dengan kendala, dengan memperkenalkan multiplikator Lagrange untuk menggabungkan fungsi tujuan dan kendala. Pengembangan metode untuk mengatasi kelemahan metode klasik diantaranya, *Primal-Dual Interior Point* dengan memberikan solusi alternatif yang lebih stabil dibandingkan Lagrange Multiplier dalam menangani kendala nonlinier yang kompleks.

d. Metode Simplex: Metode ini digunakan dalam optimisasi linear untuk mencari solusi optimal dari fungsi linear dengan kendala linear. Pengembangan metode untuk mengatasi kelemahan metode klasik diantaranya, *Primal-Dual Interior Point* dengan bekerja di dalam himpunan feasibel dan menghindari eksplorasi sudut-sudut ekstrem, sehingga lebih efisien untuk masalah besar.

4.2 Kelebihan dan Kelemahan Optimisasi Konveks

Optimisasi konveks memiliki beberapa keunggulan utama yang menjadikannya pendekatan yang andal dalam berbagai aplikasi. Salah satu keunggulan utama adalah jaminan solusi optimal global, di mana setiap minimum lokal juga merupakan minimum global, sehingga memastikan kepastian dalam pencarian solusi. Selain itu, struktur konveks memungkinkan penerapan algoritma yang lebih efisien dan cepat konvergen, seperti metode gradient descent, yang secara signifikan meningkatkan efisiensi komputasi. Stabilitas solusi juga menjadi kelebihan penting, karena solusi yang diperoleh umumnya tetap konsisten meskipun terdapat variasi kecil pada data atau parameter model.

Namun, metode optimisasi konveks juga memiliki beberapa keterbatasan. Salah satunya adalah keterbatasan dalam pemodelan, karena tidak semua masalah dunia nyata dapat dinyatakan dalam bentuk konveks, sehingga membatasi cakupan penerapannya. Selain itu, mengidentifikasi apakah suatu fungsi atau himpunan bersifat konveks sering kali menjadi tantangan tersendiri, karena memerlukan analisis matematis yang mendalam dan kompleks.

4.3 Ilustrasi Perbandingan

Optimisasi konveks telah menjadi pendekatan yang semakin dominan dalam berbagai bidang karena kemampuannya menyelesaikan masalah dengan struktur non-linear dan berskala besar. Berbeda dengan metode klasik yang sering kali mengandalkan formulasi linear, optimisasi konveks memungkinkan pemodelan yang lebih realistis terhadap berbagai kendala dan biaya yang bersifat non-linear. Dalam banyak kasus, pendekatan ini tidak hanya meningkatkan efisiensi komputasi tetapi juga memberikan solusi yang lebih stabil dan optimal. Berikut ini, kita akan dibahas dua kasus di mana optimisasi konveks menunjukkan keunggulannya dibandingkan metode klasik.

Kasus 1: Penjadwalan Produksi dalam Industri Manufaktur

Optimisasi jadwal produksi bertujuan untuk meminimalkan biaya operasional dengan memperhatikan kendala kapasitas mesin dan tenaga kerja. Pendekatan metode klasik yaitu pemrograman linear dengan metode simplex sering digunakan dalam penjadwalan produksi, namun kurang efektif dalam menangani biaya non-linear, seperti peningkatan biaya saat mendekati kapasitas maksimum. Adapun pendekatan optimisasi konveks yaitu model kuadratik dapat digunakan untuk merepresentasikan biaya produksi non-linear, di mana metode seperti *Interior-Point Method* lebih efisien dalam menyelesaikan masalah berskala besar [22]. Karena itu, optimisasi konveks menawarkan solusi yang lebih stabil dan efisien dalam menangani struktur biaya yang kompleks, sementara metode klasik lebih terbatas pada masalah berbasis linear.

Kasus 2: Optimasi Multiobjektif dalam Portofolio Saham

Optimisasi multiobjektif digunakan untuk menemukan keseimbangan antara beberapa faktor investasi, seperti risiko, return, dan modal investasi. Pendekatan metode klasik yaitu *Compromise Programming* (CP) mencari solusi terbaik dengan menyeimbangkan faktor-faktor investasi, tetapi tidak selalu menghasilkan solusi optimal dalam skenario terburuk. Adapun pendekatan optimisasi konveks yaitu *Nadir Compromise Programming* (NCP) mempertimbangkan skenario terburuk dengan pendekatan berbasis nilai nadir, sehingga dapat memberikan solusi lebih stabil dan optimal dalam kondisi pasar yang fluktuatif. Karena itu, metode optimisasi konveks seperti NCP lebih unggul dalam menangani optimasi multi objektif [23] dengan mempertimbangkan skenario ekstrem, sementara metode klasik lebih cocok untuk kasus dengan kendala yang lebih sederhana.

5. Kesimpulan dan Rekomendasi untuk Penelitian Masa Depan

Optimisasi konveks telah terbukti sebagai alat yang sangat efektif dalam menyelesaikan berbagai permasalahan matematis dan aplikatif. Dengan sifat konveks yang menjamin bahwa setiap minimum lokal juga merupakan minimum global, metode ini memberikan keuntungan yang signifikan dibandingkan dengan optimisasi non-konveks, terutama dalam hal efisiensi komputasi dan kepastian solusi. Selain itu, teori dualitas yang merupakan bagian penting dan tidak terpisahkan dari optimisasi konveks memberikan wawasan tambahan terhadap struktur masalah serta memungkinkan penyelesaian yang lebih efisien dalam banyak aplikasi seperti ekonomi, pembelajaran mesin, dan teknik.

Salah satu keunggulan utama optimisasi konveks adalah ketersediaan algoritma yang stabil dan efisien, seperti metode Newton, metode Quasi-Newton, dan gradient descent. Algoritma-algoritma ini tidak hanya mempercepat proses konvergensi tetapi juga mengurangi kompleksitas komputasi dibandingkan metode tradisional yang sering kali mengalami permasalahan dalam menemukan solusi optimal global. Bahkan telah dikembangkan berbagai metode untuk mengatasi kelemahan-kelemahan pada metode-metode sebelumnya. Dengan demikian, penerapan optimisasi konveks semakin luas dalam berbagai bidang, termasuk penjadwalan produksi, alokasi sumber daya, dan perencanaan strategis dalam industri.

Meskipun optimisasi konveks memiliki banyak kelebihan, masih terdapat beberapa tantangan yang perlu diteliti lebih lanjut. Salah satu tantangan utama adalah pengembangan metode yang lebih efisien untuk menangani masalah optimisasi skala besar dengan dimensi yang sangat tinggi. Selain itu, dalam beberapa kasus nyata, model optimisasi tidak selalu sepenuhnya konveks sehingga pendekatan hibrida antara optimisasi konveks dan metode heuristik atau optimisasi non-konveks masih perlu dieksplorasi lebih jauh.

Rekomendasi untuk penelitian masa depan meliputi:

a. **Eksplorasi Algoritma yang Lebih Efisien**: Meskipun algoritma optimisasi konveks saat ini sudah cukup maju, penelitian lebih lanjut mengenai metode yang lebih cepat dan hemat sumber daya tetap diperlukan, terutama untuk aplikasi dalam *big data* dan kecerdasan buatan.
b. **Penerapan dalam Sistem Nyata**: Banyak model optimisasi konveks yang telah dikembangkan secara teoritis, namun masih diperlukan studi empiris untuk menguji efektifitasnya dalam dunia nyata, seperti dalam bidang energi terbarukan, transportasi, dan sistem keuangan.
c. **Integrasi dengan *Machine Learning***: Dengan berkembangnya *machine learning* dan *deep learning*, optimisasi konveks dapat digunakan untuk mempercepat dan meningkatkan efisiensi proses pembelajaran dalam berbagai model kecerdasan buatan.
d. **Pendekatan Hibrida**: Menggabungkan optimisasi konveks dengan teknik optimisasi lainnya seperti metode metaheuristik dapat menjadi solusi untuk menangani masalah yang tidak sepenuhnya konveks.

Dengan terus berkembangnya penelitian dalam bidang optimisasi konveks, diharapkan akan muncul metode baru yang lebih efisien dan fleksibel dalam menangani berbagai tantangan yang ada. Optimisasi konveks tetap menjadi fondasi yang penting dalam berbagai bidang ilmu dan aplikasinya akan terus berkembang seiring dengan kemajuan teknologi.

Referensi

[1] S. Boyd dan L. Vandenberghe, *Convex Optimizatio.* New York: Cambridge University Press, 2004.

[2] E. Hazan, *Introduction0 to Online Convex Optimization*, Second Edition. 2021.

[3] S. Bubeck, *Convex Optimization in Machine Learning*. arXiv, 2015.

[4] N. Parikh dan S. Boyd, “Proximal algorithms,” *Foundations and Trends in Optimization*, vol. 1, no. 3, pp. 127–239, 2014, doi: 10.1561/2400000003.

[5] N. Nurwahidah, "Optimasi Masalah Convex Quadratic Programming dengan Metode Primal Dual Interior Point," *Jurnal MSA (Matematika dan Statistika serta Aplikasinya)*, vol. 11, no. 1, pp. 52-59, Mar. 2023.

[6] R. B. Utomo, "Metode Numerik Stepest Descent Terinduksi Newton dalam Pemecahan Masalah Optimisasi Tanpa Kendala," *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, vol. 5, no. 3, pp. 187–194, Sep. 2016.

[7] P. D. Khanh, B. Mordukhovich, V. T. Phat, dan D. B. Tran, "Globally Convergent Coderivative-Based Generalized Newton Methods in Nonsmooth Optimization," *arXiv preprint arXiv:2109.02093*, 2021.

[8] A. Gibali, K.-H. Küfer, D. Reem, dan P. Süss, "A Generalized Projection-Based Scheme for Solving Convex Constrained Optimization Problems," *arXiv preprint arXiv:1803.05617*, 2018.

[9] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, dan J. Eckstein, "Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers," *Foundations and Trends® in Machine Learning*, vol. 3, no. 1, pp. 1–122, 2010.

[10] M. V. Afonso, J. M. Bioucas-Dias, dan M. A. T. Figueiredo, "Fast Image Recovery Using Variable Splitting and Constrained Optimization," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 19, no. 9, pp. 2345–2356, 2010.

[11] L. M. R. Rere, M. I. Fanany, dan A. M. Arymurthy, "Metaheuristic Algorithms for Convolution Neural Network," *arXiv preprint arXiv:1610.01925*, 2016.

[12] J. Nocedal dan S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2nd ed. New York: Springer, 2006.

[13] F. Glover and G. A. Kochenberger, *Handbook of Metaheuristics*. Boston, MA: Springer, 2003.

[14] Wikipedia, "Fungsi cembung," Wikipedia bahasa Indonesia, ensiklopedia bebas. [Online]. Available: https://id.wikipedia.org/wiki/Fungsi_cembung. [Diakses pada 15 Maret 2025].

[15] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, 4th ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2011.

[16] I. Griva, S. G. Nash, and A. Sofer, *Linear and Nonlinear Optimization*, 2nd ed. Philadelphia, PA: SIAM, 2009.

[17] D. G. Luenberger and Y. Ye, *Linear and Nonlinear Programming*, 3rd ed. New York, NY: Springer, 2008.

[18] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1976.

[19] A. A. Ahmadi, "Lecture 7: Convex Optimization," *Princeton University*, 2021.

[20] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, 2nd ed. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1976.
[21] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 2nd ed. Belmont, MA: Athena Scientific, 1999.
[22] K. R. I. Labiro and T. M. A. Januaviani, "Comparison of Simplex Method and Interior Point Algorithm in Optimization of Children's Clothing Production Sales Profit on Jawa Island," *Asian Journal of Natural Sciences (AJNS)*, vol. 3, no. 2, pp. 59–76, 2024, doi: 10.55927/ajns.v3i2.11930.
[23] T. A. Saputro and M. F. Qudratullah, "Optimasi Multi Objektif Pada Pemilihan Portofolio Saham Syariah Menggunakan Compromise Programming (CP) dan Nadir Compromise Programming (NCP)," *Jurnal Fourier*, vol. 6, no. 2, pp. 91–104, 2017, doi: 10.14421/fourier.2017.62.91-104.
[24] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, dan T. Meyarivan, "A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, no. 2, pp. 182–197, 2002.